

TEK-UP University

Février 2025

Série N°1 : Analyse II

Calcul Intégral

Section : CPI 1	Nombre de pages :3
-----------------	--------------------

Remarque : Le fait que les exercices soient plus ou moins séparés par méthode d'intégration ne signifie pas que la méthode à utiliser sera précisée lors d'un éventuel exercice d'examen.

Calcul direct

Exercice 1

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\int x(x^3 + 1)dx, \int \frac{1}{x-3}dx, \int \sin(2x - \frac{\pi}{6})dx, \int \frac{1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{2})}dx, \\ \int \tan^2(x)dx, \int \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}dx, \int \frac{6x+7}{3x^2+7x+13}dx, \int \sin^6(x)\cos(x)dx, \\ \int \sin^2(x)dx, \int \frac{1}{(2x+5)^3}dx, \int \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}dx$$

Exercice 2

Soient $F(x) = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}dx$ et $G(x) = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}dx$

Déterminer $F + G$ et $F - G$.
En déduire les expressions de F et G .

Intégration par parties

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 t^2 e^t dt$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \ln(1 + \cos(t)) dt$, c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

Exercice 4

Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi xe^x \sin(2x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi xe^x \cos(2x) dx$$

Changement de variable**Exercice 5**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} a) \int \tan(x) dx, \quad b) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad c) \int \frac{dx}{x \ln^3(x)}, \quad d) \int x \sqrt{1+x^2} dx, \\ e) \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad f) \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad g) \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx. \end{aligned}$$

Fractions rationnelles**Exercice 6**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$a) \int \frac{1}{x(x+1)} dx, \quad b) \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx, \quad c) \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx, \quad d) \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} dx,$$

Fonction définie par intégrale**Exercice 7**

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t) dt$.

- (a) Justifier que f et H sont bien définies sur $[1, +\infty[$
 (b) Quelle relation existe-elle entre H et f ?
 (c) Interpréter le terme 'aire' le nombre $H(3)$.
- On se propose maintenant de donner un encadrement du nombre $H(3)$.
 (a) Montrer que $\forall x > 0, \frac{x}{e^x - 1} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.
 (b) En déduire que

$$\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

(c) Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors

$$\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$$

(d) En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x})dx$, puis de $H(3)$.

Exercice 8

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{sh(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f est dérivable et calculer f' .